B.A. / B.Sc. Second Semester

(Assignment)

MATHEMATICS

First Paper

Integral Calculus

UNIT-I

Q.1 a) Find the asymptotes of the following curve

निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये।

$$(x^2 - y^2)^2 - 4y^2 + y = 0$$

b) Determine the existence and nature of the double point on the curve $(x-2)^2 = y(y-1)^2$.

वक्र $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ पर द्विक बिन्दुओं की विद्यमता एवं उनकी प्रकृति का निर्धारण कीजिए।

Q.2 (a) Find the asymptotes of the curve $r\sin\theta = a$

वक्र $r\sin\theta = a$ की अन्नतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

(b) Trace the curve $x^3 + y^3 = a^2x$.

वक्र $x^3 + y^3 = a^2x$ का अनुरेखण कीजिये।

UNIT-II

Q.3 a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1+x^2)}} \frac{dx\, dy}{1 + x^2 + y^2}$$

Q.4 (a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\int_b^a (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1}\beta(m,n)$$

(b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} r\sin\theta\, d\theta\, dr$$

UNIT-III

Q.5 a) Evaluate the following integral by changing to polar co-ordinates.

निम्नलिखित समाकल का ध्रुवीय निर्देशांकों में बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x\, dy\, dx}{x^2 + y^2}$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{(yz - x^2)}} dz\, dx\, dy$$

Q.6 (a) Evaluate the following integral by changing the order of integration.

निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$$

(b) Evaluate $\iiint x^{l-1}\, y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz$

where $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ and $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

मान ज्ञात कीजिए $\iiint x^{l-1}\, y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz$

जहां $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ तथा $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

UNIT-IV

Q.7 (a) Prove that the area of loop of the curve $x = a(1-t^2), y = at(1-t^2);\ -1 \leq t \leq 1$ is $8a^2/_{15}$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = a(1-t^2), y = at(1-t^2);\ -1 \leq t \leq 1$ के लूप का क्षेत्रफल $8a^2/_{15}$होता है

b) Find the volume of the solid generated by the revolution of tractrix

$x = a\cos t + \frac{a}{2}\log tan^2\frac{t}{2},\ \ y = a\sin t$ about its asymptote.

ट्रेक्ट्रिक्स $x = a\cos t + \frac{a}{2}\log tan^2\frac{t}{2},\ \ y = a\sin t$ का अपने अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Q.8(a) Find the length of the arc of the curve $y = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ from $x = 1$ to $x = 2$.

वक्र $y = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ की $x = 1$ से $x = 2$ तक की चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

b) Evaluate the surface area of the solid generated by revolving the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ about the x −axis.

चक्रज $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ को x −अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

B.A./B.Sc.(Pass/Subsidiary/Hons.) Second Semester

Assignment

(Faculty of Science)
MATHEMATICS
PAPER-II Abstract Algebra

UNIT-I

1. If a and b are any two elements of a group $(G,*)$ then show that the equation $a \quad x = b$ and $y \quad a = b$ have unique solution in G.

यदि a और b किसी समूह $(G, \;)$ के कोई दो अवयव हैं तो दर्शाइए कि समीकरण $a \quad x = b$ और $y \quad a = b$ के अद्वितीय हल है।

2.(a) Find $\sigma^{-1}\rho\sigma$, when
$\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिए

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

And $\sigma = (1\ \ 3\ \ 4)\ (5\ \ 6)\ \ (2\ \ 7\ \ 8\ \ 9)$

Also express the permutations ρ as a product of disjoint cycles. Find whether ρ is even or odd permutation and give its order.

तथा क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में भी व्यक्त करें। ज्ञात कीजिए कि ρ सम है या विषम क्रमचय और कोटि भी बताइये

(b) If H and K are any two subgroups of a group G then prove that HK is a subgroup of G iff HK=KH.

यदि H और K समूह G के कोई दो उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK, G का एक उपसमूह है यदि और केवल यदि HK=KH.

UNIT-II

3.(a) State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रेंज के प्रमेय का कथन दीजिये तथा सिद्ध कीजिये

(b) Prove that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.

सिद्ध करें कि एक समूह के उपसमूह के कोई भी दो दाएं (बाएं) सह समुच्चय या तो समान या असंबद्ध हैं।

4. (a) If H and K are two normal subgroups of G then prove that HK is also a normal subgroup of G.

यदि H और K, G के दो सामान्य उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK भी G का एक सामान्य उपसमूह है।

(b) Find the quotient group G/H when $G =< Z_8 , +_8>$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8>$
भागफल समूह G/H ज्ञात कीजिए जब $G =< Z_8 , +_8>$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8>$

UNIT-III

5(a)Prove that a homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff kernel of $f = \{e\}$,where e is the identity in G.
सिद्ध कीजिए कि समूह G का समूह G' में समाकारिता f एक एकैक समकारिता है यदि और केवल यदि अष्टि f={e}, जहां e G में तत्समक है

(b) Show that the set J of Gaussian Integers $J = \{m + in | m, n \ \in z\}$ form a ring with respect to ordinary addition and multiplication of complex numbers.
दर्शा ` कि गाऊसी पूर्णांकों का समुच्चय $J = \{m + in | m, n \ \in z\}$ सम्मिश्र संख्याओं का साधारण जोड़ और गुणा के संबंध में एक वलय बनाते हैं ।

6. Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकिय प्रान्त है लेकिन विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

UNIT-IV

7. (a) Prove that the necessary and sufficient conditions for a non – empty subset K of a field F to be a subfield are
सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र F के एक अरिक्त उपसमुच्चय K के उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें हैं

(i) $a \in K,\ b \in K \ \Rightarrow a - b \in K$
(ii) $a \in K, 0 \neq b \in K \ \Rightarrow ab^{-1} \in K$

(b) Prove that the intersection of two subrings is also a subring.
सिद्ध कीजिए कि दो उपवलय का प्रतिच्छेदन भी एक उपवलय होता है।

8, Prove that $S = \left\{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}\ c | a, b, c \in Q\right\}$is a subfield of R.
सिद्ध कीजिए कि $S = \left\{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}\ c | a, b, c \in Q\right\}$,R का एक उपक्षेत्र है।

*****

B.A./B.Sc./B.Sc. (Hons.) Fourth Semester Examination
(Assignment)
MATHEMATICS
First Paper
Complex Analysis

Unit-I

1. (a) Obtain the equation of a circle through three given points.
तीन बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the area of the triangle whose vertices are the points z_1, z_2, z_3 on the Argand diagram is
सिद्ध कीजिये कि आर्गेण्ड चित्र में बिन्दुओं z_1, z_2, z_3 शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\sum\{(z_2 - z_3)|z_1|^2/(4iz_1)\}$$

2. (a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

(b) Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous every where but its derivative exists only at the origin.
सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र संतत है किन्तु इसके अवकलन का अस्तित्व केवल मूल बिन्दु पर ही है।

Unit-II

3. (a) Define Singular Point. Prove the necessary condition that a function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ be analytic in a domain D is that in D, u and v satisfy the Cauchy – Riemann equation i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

विचित्र बिन्दु परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ के किसी प्रान्त D में विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है कि उस प्रान्त में u तथा v कोशी – रीमान समीकरण संतुष्ट करते हैं अर्थात्

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \, , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(b) Show that the function $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$ satisfies the Cauchy – Riemann equation at the origin but is not analytic at the point.
प्रदर्शित कीजिए की फलन $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$ मूल बिन्दु पर कोशी – रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है परन्तु इस बिन्दु पर विश्लेषिक फलन नहीं है।

4. (a) Define Harmonic Function. Show that function $u = cos\, x\, cos\, hy$ is harmonic and find its harmonic conjugate.
प्रसंवादी फलन परिभाषित कीजिए सिद्ध कीजिए कि फलन $u = cos\, x\, cos\, hy$ प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ satisfy Laplace equation. Also determine the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.
सिद्ध कीजिए कि $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ लेप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है , निम्न का विश्लेषण फलन $f(z) = u + iv$ भी ज्ञात कीजिए।

Unit-III

5. Show that both the transformations $\omega = \frac{z+i}{z-i}$ and $\omega = \frac{i+z}{i-z}$ transform $|W| \le 1$ into the lower half plane $I(Z) \le 0$
प्रदर्शित करिए कि दोनों रूपान्तरण $\omega = \frac{z+i}{z-i}$ और $\omega = \frac{i+z}{i-z}$ $|W| \le 1$ को निम्न अर्धतल $I(Z) \le 0$ में रूपान्तरित

करता है।

6. Discuss the transformation $w = z^2$. Find the images of the hyperbolas $x^2 - y^2 = c$ and $xy = d$ under this transformation.

रूपान्तरण $w = z^2$ की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों $x^2 - y^2 = c$ तथा $xy = d$ का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

Unit-IV

7. (a) Evaluate $\int_o^{1+i} z^2 dz$

मान ज्ञात कीजिय $\int_o^{1+i} z^2 dz$

(b) If $f(z)$ is analytic in a simply connected domain G , then the indefinite integral $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ is independent of the path joining z_0 with z in G.

सिद्ध कीजिए कि यदि एकशः सम्बद्ध प्रदेश G में $f(z)$ विश्लेषिक फलन हो, तो अनिश्चित समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$, G में

बिन्दुओं z_0 तथा z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होता है।

8. State and prove Morera Theorem.

मोरेरा प्रमेय का कथन लिखिए एंव इसे सिद्ध कीजिए।

B.A. / B.Sc. Fourth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
Second PAPER
Numerical Analysis
Unit- I

1. Use Newton Gregory difference interpolation formula to compute y(3.62) and (3.72) from the following table:

X	3.60	3.65	3.70	3.75
Y	36.598	38.475	40.447	42.521

2. Find the value of f(2) , f(8) and f(15) from the following table:

X	**4**	**5**	**7**	**10**	**11**	**13**
Y	**48**	**100**	**294**	**900**	**1210**	**2028**

Unit-II

3. **(a)** Given the following data, find the value of the following integral using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule and compare it with the actual value.

निम्न आंकड़ों से निम्न समाकल का सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम द्वारा मान ज्ञात कीजिए तथा वास्तविक मान से इसकी तुलना कीजिए।

$$\int_0^4 e^x dx, \quad e = 2.72, \quad e^2 = 7.39; \quad e^3 = 20.09, \quad e^4 = 54.60$$

(b) Use Gauss's forward formula to find out y for $x = 30$, given the following data.

गॉस के अग्र अन्तर्वेशन सूत्र का उपयोग करके निम्न संमको के आधार पर $x = 30$ के लिए y के मान का आकलन कीजिए।

x	21	25	29	33	37
y	18.47	17.81	17.10	16.34	15.51

4. (a) Compute the value of following integral by Trapesoidal rule

ट्रेपिजोइडल (समलम्बीय) नियम द्वारा निम्न समाकल के मान का परिकलन कीजिए

$$\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x) dx$$

(b) Find the value of $f'(.04)$ from the following table

निम्न सारणी से $f'(.04)$ का मान ज्ञात कीजिए

x	.01	.02	.03	.04	.05	.06
y	.1023	.1047	.1071	.1096	.1122	.1148

Unit-III

Q.5. a) Using the Bisection method, find the real root of the equation:
द्विभाजन विधि का प्रयोग करते हुये समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिएः
$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ in interval (अन्तराल) $[0, 1]$

b) Using method of false position, find the real root of the equation:
मिथ्या–स्थिति विधि द्वारा समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिएः
$x^3 - 2x - 5 = 0$

Q.6. (a) Using method of iteration, find the real root of the equation:
पुनरावृति विधि से समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिएरू
$x^3 + x^2 - 1 = 0$

(b) Find the real root of the equation correct to four places of decimals by Newton – Raphson method.
न्यूटन–रेफसन विधि द्वारा समीकरण का वास्तविक मूल चार दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए।
$x^3 - 3x - 5 = 0$

Unit-IV

Q.7. a) Using Picard's method to find approximate value of y when $x = 0.1$, given that $y = 1$ when $x = 0$ and $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.
पिकार्ड विधि का प्रयोग कर $x = 0.1$ के लिए y का सन्निकट मान प्राप्त कीजिये जबकि दिया हुआ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$, $x = 0$ पर $y = 1$

b) Using Euler's method with step size 0.1, find the value of y(0.5) from the following differential equation:
पद की लम्बाई 0.1 लेते हुये आयलर विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण से $y(0.5)$ का मान ज्ञात कीजिएः
$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$

Q.8. (a) Find approximate value of y and z by using Picard's method for the particular solution of $\frac{dy}{dx} = x + z$, $\frac{dz}{dx} = x - y^2$, given that $y = 2, z = 1$, when $x = 0$.
y तथा z के सन्निकट मान पिकार्ड विधि में प्राप्त कीजिये, यदि $\frac{dy}{dx} = x + z$, $\frac{dz}{dx} = x - y^2$,
दिया हुआ है कि $x = 0$ पर $y = 2$ तथा $z = 1$

(b) Using Runge – Kutta method find an approximate value of y for $x = 0.2$ in steps of 0.1, if $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ given $y = 1$ when $x = 0$.
रूंगे कुट्टा विधि का प्रयोग कर $x = 0.2$ पर y का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए यदि $\frac{dy}{dx} = x + y^2$,
जबकि $x = 0$ पर $y = 1$ एवं पद लम्बाई 0.1 है।

B.A./B.Sc.(Pass/Subsidiary) Sixth Semester

(Assignment)

MATHEMATICS

FIRST PAPER

Abstract Algebra-II

UNIT-I

Q.1. (a) Prove that, every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring (residue class ring) thereof.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की प्रत्येक समाकारिक प्रतिबिम्ब उसकी किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होती है।

(b) Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals or if it is simple.

सिद्ध कीजिए कि, एक क्रमविनिमेय तत्सम की वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी कोई उचित गुणजावली न हो या यह एक सरल वलय हो।

Q.2. (a) Prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is maximal iff the quotient ring $R/_I$ is a field.

सिद्ध कीजिए कि तत्सम की क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय $R/_I$ एक क्षेत्र है।

(b) Prove that, the ring $(z, +, \cdot)$ of integers is a principal ideal domain.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की वलय $(z, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

UNIT-II

Q.3. (a) Prove that, every integral domain can be embedded into a field.

सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णांकीय प्रान्त को एक क्षेत्र में अन्तः स्थापित किया जा सकता है।

(b) Prove that, the field $< z_p, +_p, \cdot_p >$ is a prime field for each prime number p.

सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र $< z_p, +_p, \cdot_p >$ प्रत्येक अभाज्य सँख्या p के लिए, एक अभाज्य क्षेत्र है।

Q.4. (a) Prove that, the set F^n of all ordered n – tuples of a field F is a vector space over the field

F for the vector addition and scalar multiplication defined as

सिद्ध कीजिए कि किसी क्षेत्र F के अवयवो के n क्रमित तुपलों का समुच्चय F^n, क्षेत्र F पर निम्न परिभाषित सदिश योग व अदिश गुणन के लिए एक सदिश समिष्ट है।

$(a_1, a_2, \dots \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots \dots a_n + b_n)$

$\propto (a_1, a_2, \dots \dots a_n) = (\propto a_1, \propto a_2, \dots \dots \propto a_n)$

where (जहाँ) $(a_1, a_2, \dots \dots a_n), (b_1, b_2, \dots \dots b_n) \in F^n \ \propto \in F$

(b) Prove that, the set S of all solutions satisfying the simultaneous equations

$ax + by + cz = 0$ and $dx + ey + fz = 0$, where $a, b, c, d, e, f \in R$ is a subspace of vector space $V = R^3$ over the field R.

सिद्ध कीजिए कि युगपत समीकरणों $ax + by + cz = 0$ तथा $dx + ey + fz = 0$ के समस्त हलों का समुच्चय S, जहाँ $a, b, c, d, e, f \in R$ पर सदिश समष्टि $V = R^3$ का क्षेत्र R पर उपसमष्टि है।

UNIT-III

Q.5. (a) Prove that the vectors $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$ are linearly dependent in the vector space $V_2(C)$ but are linearly independent in the vector space $V_2(R)$.

सिद्ध कीजिए कि सदिश $v_1 = (1+i, 2i), v_2 = (1, 1+i)$ सदिश समिष्ट $V_2(C)$ में एकघाततः परतन्त्र है परन्तु सदिश समष्टि $V_2(R)$ में एकघाततः स्वतंत्र है।

(b) Prove that, the set of non – zero vectors $\{v_1, v_2 \dots \dots v_n\}$ of a vector space $V(F)$ is linearly dependent iff some $v_k, 2 \le k \le n$ is a linear combination of the preceding vectors.
किसी सदिश समिष्ट $V(F)$ के अशून्य सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2 \dots \dots v_n\}$ एकघाततः आश्रित (परतंत्र) होगा यदि और केवल यदि कोई एक $v_k, 2 \le k \le n$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो।

Q.6. (a) If S and T are finite dimensional subspaces of a vector space, then prove that

$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$.
यदि S एवं T किसी सदिश समिष्ट की परिमित विमिय उपसमिष्टयाँ हो, तो सिद्ध कीजिए
विमा S + विमा T =विमा $(S+T)$ + विमा $(S \cap T)$

(b) Prove that a vector space $V(F)$ is a direct sum of its two subspaces $U(F)$ and $W(F)$ iff
$V = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$
सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समिष्ट $V(F)$ अपनी दो उपसमिष्टयों $U(F)$ और $W(F)$ का अनुलोम योगफल होगी यदि और केवल यदि
(i) $v = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$

UNIT-IV

Q.7. (a) If $W(F)$ is any subspace of a vector space $V(F)$, then prove that the set $\frac{V}{W}$ of all co sets

$W + v, v \in V$ is a vector space over the field F for the vector addition and scalar multiplication defined as
यदि $W(F)$ सदिश समिष्ट $V(F)$ की उपसमिष्ट है तो सिद्ध कीजिए कि W के V में सहसमुच्चयों $\frac{V}{W} = \{W + v, v \in V\}$ क्षेत्र $(F, +, \cdot)$ पर निम्न सदिश योग तथा अदिश गुणन संक्रिया के लिए सदिश समिष्ट होता है
$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2) \, \forall \, v_1, v_2 \in V$ and (और) $\propto \cdot (W + v) = W + \propto \cdot v, \propto \in k, v \in V$

(b) Show that the mapping $t: V_2(R) \to V_2(R)$ defined by $t(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ is an isomorphism.
सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $t: V_2(R) \to V_2(R)$ जहाँ $t(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$समिष्ट $V_2(R)$ पर एक तुल्यकारिता है।

Q.8. (a) Prove that, the kernel of a linear transformation $t: V \to V'$ is a subspace of the vector space V.

सिद्ध कीजिए कि रैखिक प्रतिचित्रण $t: V \to V'$ की अष्टि, सदिश समिष्ट V की उपसमिष्ट होती है।

(a) Prove that $t: R^3 \to R^3$, defined as $t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ is a linear transformation. Also find the rank and nullity of t.
सिद्ध कीजिए कि $t: R^3 \to R^3$, $t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ एक रैखिक रूपान्तरण है तथा t की कोटि एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

B.A./B.Sc.(Pass/Subsidiary) Sixth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS

SECOND PAPER

Complex Analysis-II

UNIT-I

Q.1. (a) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.
सिद्ध कीजिये कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है।

(b) Prove that the sequences $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ is uniformly convergent to zero in the region $|z| \geq 2$.
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ क्षेत्र $|z| \geq 2$ में शून्य को एक समान अभिसृत होती है।

Q.2. (a) Find the region of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$.
श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ का अभिसरण श्रेत्र प्राप्त कीजिये।

b) Show that the function $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... can be continued analytically outside the circle of convergence. Also construct a power series which is analytic continuation of given series.

सिद्ध कीजिये कि फलन $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... का विश्लेषिक सांतत्य अभिसरण वृत के बाहर किया जा सकता है। एक घात श्रेणी की रचना भी कीजिये जो कि दी हुई श्रेणी का विश्लेषिक सांतत्य है।

UNIT-II

Q.3. State and prove Taylor's Theorem for complex functions.
कथन सहित सम्मिश्र फलनों के लिए टेलर प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.4. Prove that (सिद्ध कीजिये)

$$sin\left\{c\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^n + z^{-n})$$

where (जहाँ)

$$a_n = \frac{1}{2\prod} \int_0^{2\prod} \sin(2c\, cos\theta)\ cos\, n\theta\ d\theta.$$

UNIT-III

Q.5. Evaluate the integral $\frac{1}{2\prod i} \int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz$ around the circle $c{:}\,|z| = 3$.
परिरेखा वृत $c{:}\,|z| = 3$ पर समाकल $\frac{1}{2\prod i} \int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz$ का मान ज्ञात कीजिये।

Q.6. State and prove Rouche's Theorem.
कथन सहित रूशे प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

UNIT-IV

Q.7. Discuss the transformation $w = z^2$. Find the images of the hyperbolas $x^2 - y^2 = c$ and $xy = d$ under this transformation.
रूपान्तरण $w = z^2$ की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों $x^2 - y^2 = c$ तथा $xy = d$ का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

Q.8. By integrating $\frac{e^{iz^2}}{z}$ round a suitable contour, prove that $\int_o^{\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx = \frac{\prod}{4}$ also deduce that $\int_o^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\prod}{2}$.

फलन $\frac{e^{iz^2}}{z}$ को उपयुक्त परिरेखा पर समाकलन करते हुए सिद्ध कीजिये कि $\int_o^{\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx = \frac{\prod}{4}$ तथा निगमन भी कीजिये कि $\int_o^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\prod}{2}$.