B.A. / B.Sc. Second Semester

(Assignment)

MATHEMATICS

First Paper

Integral Calculus

Attempt any two questions.

Q.1 a) Find the asymptotes of the following curve

निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये।

$$(x^2 - y^2)^2 - 4y^2 + y = 0$$

b) Determine the existence and nature of the double point on the curve $(x-2)^2 = y(y-1)^2$.

वक्र $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ पर द्विक बिन्दुओं की विद्यमता एवं उनकी प्रकृति का निर्धारण कीजिए।

Q.2 (a) Find the asymptotes of the curve $r\sin\theta = a$

वक्र $r\sin\theta = a$ की अन्नतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

(b) Trace the curve $x^3 + y^3 = a^2x$.

वक्र $x^3 + y^3 = a^2x$ का अनुरेखण कीजिये।

Q.3 a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1+x^2)}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$$

Q.4 (a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\int_b^a (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}dx = (b-a)^{m+n-1}\beta(m,n)$$

(b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} r\sin\theta\, d\theta\, dr$$

Q.5 a) Evaluate the following integral by changing to polar co-ordinates.

निम्नलिखित समाकल का ध्रुवीय निर्देशांकों में बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{(yz-x^2)}} dz\,dx\,dy$$

Q.6 (a) Evaluate the following integral by changing the order of integration.

निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{\ y}}{y}\, dx\, dy$$

(b) Evaluate $\iiint x^{l-1}\, y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz$

where $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ and $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

मान ज्ञात कीजिए $\iiint x^{l-1}\, y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz$

जहां $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ तथा $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

Q.7 (a) Prove that the area of loop of the curve $x = a(1-t^2), y = at(1-t^2);\ -1 \leq t \leq 1$ is ${8a^2}/{15}$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = a(1-t^2), y = at(1-t^2);\ -1 \leq t \leq 1$ के लूप का क्षेत्रफल ${8a^2}/{15}$होता है

b) Find the volume of the solid generated by the revolution of tractrix

$x = a\cos t + \frac{a}{2}\log tan^2\frac{t}{2},\ \ y = a\sin t$ about its asymptote.

ट्रेक्ट्रिक्स $x = a\cos t + \frac{a}{2}\log tan^2\frac{t}{2},\ \ y = a\sin t$ का अपने अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Q.8(a) Find the length of the arc of the curve $y = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ from $x = 1$ to $x = 2$.

वक्र $y = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ की $x = 1$ से $x = 2$ तक की चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

b) Evaluate the surface area of the solid generated by revolving the cycloid
$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ about the x –axis.
चक्रज $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ को x –अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

B.A./B.Sc.(Pass/Subsidiary/Hons.) Second Semester

Assignment

(Faculty of Science)
MATHEMATICS
PAPER-II
Abstract Algebra

1. If a and b are any two elements of a group $(G,*)$ then show that the equation $a * x = b$ and $y * a = b$have unique solution in G.

यदि a और b किसी समूह $(G *)$के कोई दो अवयव हैं तो दर्शाइए कि समीकरण $a * x = b$ और $y * a = b$ के अद्वितीय हल है।

2.(a) Find $\sigma^{-1}\rho\sigma$, when
$\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिए

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Andσ= (1 3 4) (5 6) (2 7 8 9)
Also express the permutations ρ as a product of disjoint cycles. Find whether ρ is even or odd permutation and give its order.
तथा क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में भी व्यक्त करें। ज्ञात कीजिए कि ρ सम है या विषम क्रमचय और कोटि भी बताइये

(b) If H and K are any two subgroups of a group G then prove that HK is a subgroup of G iff HK=KH.
यदि H और K समूह G के कोई दो उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK, G का एक उपसमूह है यदि और केवल यदि HK=KH.

3.(a) State and prove Lagrange's theorem.
लैग्रेंज के प्रमेय का कथन दीजिये तथा सिद्ध कीजिये

(b) Prove that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.
सिद्ध करें कि एक समूह के उपसमूह के कोई भी दो दाएं (बाएं) सह समुच्चय या तो समान या असंबद्ध हैं।

4. (a) If H and K are two normal subgroups of G then prove that HK is also a normal subgroup of G.

यदि H और K, G के दो सामान्य उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK भी G का एक सामान्य उपसमूह है।

(b) Find the quotient group G/H when $G =< Z_8 , +_8>$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8>$
भागफल समूह G/H ज्ञात कीजिए जब $G =< Z_8 , +_8>$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8>$

5(a)Prove that a homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff kernel of $f = \{e\}$,where e is the identity in G.
सिद्ध कीजिए कि समूह G का समूह G' में समाकारिता f एक एकैक समकारिता है यदि और केवल यदि अष्टि f={e}, जहां e G में तत्समक है

(b) Show that the set J of Gaussian Integers $J = \{m + in | m, n \in z\}$ form a ring with respect to ordinary addition and multiplication of complex numbers.
दर्शा ` कि गाऊसी पूर्णांकों का समुच्चय $J = \{m + in | m, n \in z\}$ सम्मिश्र संख्याओं का साधारण जोड़ और गुणा के संबंध में एक वलय बनाते हैं ।

6. Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकिय प्रान्त है लेकिन विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

7. (a) Prove that the necessary and sufficient conditions for a non – empty subset K of a field F to be a subfield are
सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र F के एक अरिक्त उपसमुच्चय K के उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें हैं

(i) $a \in K,\ b \in K \implies a - b \in K$
(ii) $a \in K, 0 \neq b \in K \implies ab^{-1} \in K$

(b) Prove that the intersection of two subrings is also a subring.
सिद्ध कीजिए कि दो उपवलय का प्रतिच्छेदन भी एक उपवलय होता है।

8, Prove that $S = \left\{a + 2^{1/3} b + 4^{1/3} c | a, b, c \in Q\right\}$is a subfield of R.
सिद्ध कीजिए कि $S = \left\{a + 2^{1/3} b + 4^{1/3} c | a, b, c \in Q\right\}$,R का एक उपक्षेत्र है।

*****

B.Sc. (Hons.) Second Semester Examination

(Faculty of Science)

MATHEMATICS

Third PAPER

Graph Theory

Assignment

(Attempt any two questions)

Unit I

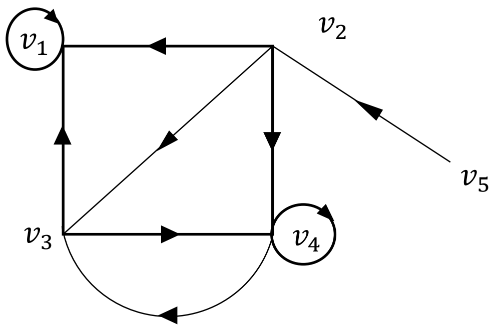
1 (a) Prove that the sum of degrees of all the vertices in a graph is equal to twice the number of edges in the graph.

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्राफ में उसके सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल ग्राफ में उपस्थित कोरों की संख्या का दो गुना होता है।

1 (b) Determine the out-degree and in-degree of each of the vertex in the following digraph. Also verify that

निम्न दिष्ट ग्राफ में प्रत्येक शीर्ष की बाह्य कोटि तथा अन्तः कोटि ज्ञात कीजिए। यह भी सत्यापित कीजिए कि

$$\sum deg^{+}(v) = \sum deg^{-}(v) = |E|$$

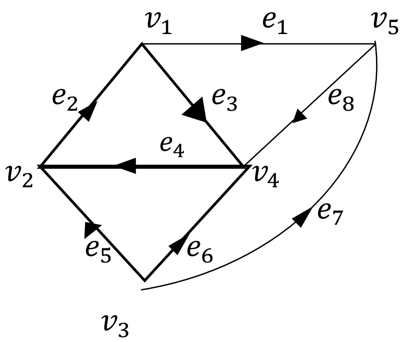


2 (a) The edges of K_6 are to be painted red or blue. Show that for any arbitrary way of painting there is a red K_3 or a blue K_3.

ग्राफ K_6 की कोरों को लाल अथवा नीले रंग से रंगा जाना है। प्रदर्शित कीजिए कि रंगने के सभी स्वेच्छ तरीके एक लाल K_3 अथवा एक नीला K_3 ग्राफ प्राप्त होता है।

2 (b) Find the adjacency matrix and the incidence matrix of the following directed graph.

निम्न दिष्ट ग्राफ का आसन्नता आव्यूह तथा आपतन आव्यूह ज्ञात कीजिए।



UNIT-II

3 (a) Define with an example.
उदाहरण सहित परिभाषित करो

(i) Product of two graphs
दो ग्राफो का गुणनफल

(ii) Isomorphism of Graphs
ग्राफो की तुल्यकारिता

3 (b) A connected graph G has an Euler trail if and only if it has at most two vertices of odd degree.

सम्बद्ध ग्राफ G में एक आयलर ट्रेल होती है यदि और केवल यदि G में अधिक से अधिक दो शीर्ष विषम कोटि के हैं।

4 (a) Define with an example

उदाहरण सहित परिभाषित करो

(i) Trail

ट्रेल

(ii) Path

पथ

5

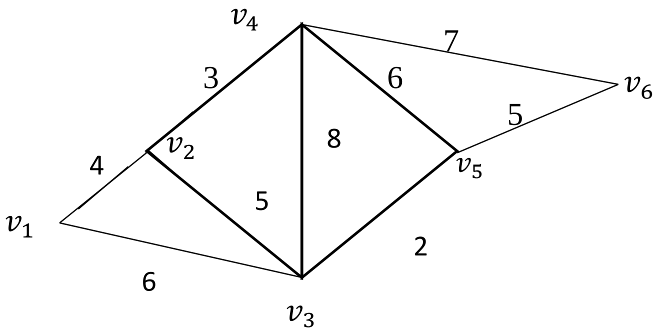
4 (b) Prove that in a complete Graph with n vertices, there are $\frac{n-1}{2}$ edge disjoint Hamiltonian cycles if n is an odd number ≥ 3

सिद्ध कीजिए कि n शीर्षों वाले पूर्ण ग्राफ में (n एक विषम पूर्णांक ≥ 3) $\frac{n-1}{2}$ कोर - असंयुक्त हैमिलटोनियन चक्र होते हैं 5

UNIT-III

5. (a) Find the shortest path from the vertex v_1 to vertex v_6 in the following weighted graph.

निम्न भारित ग्राफ में शीर्षो v_1 से v_6 तक लघुतम मार्ग दूरी ज्ञात कीजिएः



5 (b) If G is a connected planar graph with n vertices, e edges and r regions, then

यदि G एक सम्बद्ध समतलीय ग्राफ है जिसमें n शीर्ष , e कोरें तथा r क्षेत्र हैं, तब

$$n - e + r = 2$$

6 (a) If G is simple connected planar graph with n vertices and e edges, then

यदि G एक सरल सम्बद्ध समतलीय ग्राफ है जिसमें n शीर्ष तथा e कोरें हैं, तब

$$e \leq 3n - 6 \quad (e > 2)$$

6 (b) Prove that Complete Bipartite Graph $K_{3,3}$ is non planar.

सिद्ध कीजिए कि पूर्ण द्विखंडी ग्राफ $K_{3,3}$ समतलीय ग्राफ नहीं है।

UNIT-IV

7. (a) If h is the height of a balanced complete binary tree on n vertices, then

यदि h शीर्षो के संतुलित पूर्ण द्विचर वृक्ष की ऊँचाई है , तब

$$h = \ log_2 \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

7 (b) If G is an acyclic graph with n vertices and k connected components, then G has $n - k$ edges.

यदि G एक अचक्रीय ग्राफ है , जिसमें n शीर्ष तथा k सम्बद्ध घटक है , तब G में $n - k$ कोरे होती है।

8 (a) There is one and only one path between every pair of distinct vertices in a tree T.

वृक्ष T में किन्हीं भी दो शीर्षों के मध्य एक और केवल एक पथ होता है।

8 (b) If T is binary tree with n vertices and of height h, then.

यदि द्विचर वृक्ष T में n शीर्ष तथा वृक्ष की ऊँचाई h है , तब

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

*****

B.Sc. (Hons.) Fourth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
FIRST PAPER
Advanced Analysis and Metric Space

Attempt any two questions.

Q.1 (a) Show that the sequence $\{f_n\}$,where $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \forall\, x \in [a,b]$ is not uniformly convergent on any interval [a,b] containing 0.

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम $\{f_n\}$ जहां $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \forall\, x \in [a,b]$ 0 को समाहित करने वाले किसी भी अन्तराल $[a,b]$ पर एकसमान अभिसारित नही होता है।

(b) Test for uniform convergence of the series.

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

Q.2 (a) Prove that the sequence $\{f_n\}$ where $f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ converges uniformly in the interval [0,1]

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\{f_n\}$ जहां $f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$, अन्तराल [0,1] में एकसमान अभिसारिता होता है।

(b) Test the series $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$ for uniform convergence for all values of x.

x के सभी मानों के लिए श्रेणी $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$ के एकसमान अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

Q.3(a) Show that the following mapping is pseudo metric but not a metric.

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न प्रतिचित्रण एक छद्‌म – दूरीक है परन्तु दूरीक नहीं है :

$d: R \times R \to R$ s.t. ताकि $d(x,y) = |x^2 - y^2|$.

(b) Let A and B be subsets of a metric space (x,d) then show that

माना कि A तथा B दूरीक समष्ठि (x,d) के उपसमुच्चय है तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Q.4 (a) Prove that in a metric space every open sphere is an open set.

सिद्ध कीजिए कि किसी भी दूरीक समष्ठि में , प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

(b) In a metric space , prove that every derived set is a closed set.

किसी भी दूरीक समष्टि में सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक व्युत्पन्न समुच्चय एक संवृत समुच्चय होता है।

Q.5. (a) Let (S,d^*) is a subspace in a metric space (X,d). If $B \subset S$ is open (closed) in X, then show that B is also open (closed) in S.

माना कि (S,d^*) दूरीक समष्टि (X,d) की उपसमष्टि है। यदि $B \subset S$, X में विवृत (संवृत) है तो प्रदर्शित कीजिए कि B, S में भी विवृत (संवृत) होगा।

(b) Let (X,d_1) and (Y,d_2) be metric spaces. Show that $f: X \to Y$ is continuous iff

माना कि (X,d_1) तथा (Y,d_2) दो दूरीक समष्टि है। प्रदर्शित कीजिए कि $f: X \to Y$ संतत होगा यदि और केवल यदि

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall \quad A \subseteq X.$$

Q.6. (a) In a metric space, prove that every convergent sequence is a Cauchy sequence.

किसी दूरीक समष्टि में , सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है।

(b) Prove that the product space is a metric space.

सिद्ध कीजिए कि गुणन समष्टि एक दूरीक समष्टि होती है।

Q.7 (a) Prove that every closed subset of a compact metric space is compact.
सिद्ध कीजिये कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक संवृत उपसमुच्चय संहत होता है।

(b) Let X be an infinite set with the discrete metric d, then show that (X,d) is not compact.
माना कि X विविक्त दूरीक d का एक अनन्त समुच्चय है , तब प्रदर्शित कीजिए कि (X,d) संहत नहीं है।

Q.8 (a) Prove that the union of two connected sets, having non – empty intersection is connected.
सिद्ध कीजिए कि अरिक्त सर्वनिष्ट वाले दो सम्बद्ध समुच्चयों का संघ सम्बद्ध होता है।

(b) Discuss the connectedness of the following subset of R^2.
R^2 के निम्न उपसमुच्चय की सम्बद्धता की जाँच कीजिए :

$$D = \{(x, y): x \neq 0 \quad and \quad y = sin\left(1/_x\right)\}$$

B.Sc. (Hons.) Fourth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
SECOND PAPER
Differential Equations-II

Attempt any two questions.

Q.1. Solve (हल कीजिए):– $\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - \cot x)\frac{dy}{dx} - y\cot x = sin^2 x$

Q.2. Solve by the method of variation of parameters

प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिये

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = cosec\ ax$$

Q.3. Solve the differential equation

अवकल समीकरण हल कीजिये।

(a) $y(1 - \log y)\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + \log y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Q.4 Find the complete integral of the following equation by Charpit's method

निम्नलिखित समीकरण से चार्पी विधि से पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिये।

$$2(z + xp + yq) = yp^2$$

Q.5. Solve the partial differential equation

आंशिक अवकल समीकरण हल कीजिये।

(a) $r - 2\,s\ + t = \sin\ (2x + 3y)$

(b) $r - 4\,s + 4t + p - 2q = e^{x+y}$

Q.6. Solve: (हल कीजिए) :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

Q.7. Solve by Monge's method

मोंग्स विधि द्वारा हल कीजिये :

$$r = a^2 t$$

Q.8. Solve by the method of separation of variable

चरों के पृथक्करण विधि द्वारा हल कीजिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{K}\frac{\partial z}{\partial t}$$

B.Sc. (Hons.) Fourth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
THIRD PAPER
Advanced Numerical Analysis

Attempt any two questions.

Q.1. a) Using the Bisection method, find the real root of the equation:
द्विभाजन विधि का प्रयोग करते हुये समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए:
$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ in interval (अन्तराल) $[0, 1]$

b) Using method of false position, find the real root of the equation:
मिथ्या–स्थिति विधि द्वारा समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए:
$x^3 - 2x - 5 = 0$

Q.2. (a) Using method of iteration, find the real root of the equation:
पुनरावृति विधि से समीकरण का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिएरू
$x^3 + x^2 - 1 = 0$

(b) Find the real root of the equation correct to four places of decimals by Newton – Raphson method.
न्यूटन–रेफसन विधि द्वारा समीकरण का वास्तविक मूल चार दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए।
$x^3 - 3x - 5 = 0$

Q.3. Using Graeffe's root squaring method, find all roots of the equation:
ग्रॉफी मूल वर्ग विधि से समीकरण के सभी मूल ज्ञात कीजिए:
$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

Q.4. (a) Using Muller's method find the root of the equation:
मुलर विधि द्वारा समीकरण को हल कीजिये:
$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
where (जहाँ) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$

(b) Using Chebyshev's method of third order find the smallest positive root of the equation:
च्यूबिशि विधि (third order) द्वारा समीकरण का निम्न धनात्मक मूल ज्ञात कीजिए:
$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 7 = 0$

Q.5. a) Using Picard's method to find approximate value of y when $x = 0.1$, given that $y = 1$ when $x = 0$ and $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.
पिकार्ड विधि का प्रयोग कर $x = 0.1$ के लिए y का सन्निकट मान प्राप्त कीजिये जबकि दिया हुआ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$, $x = 0$ पर $y = 1$

b) Using Euler's method with step size 0.1, find the value of y(0.5) from the following differential equation:
पद की लम्बाई 0.1 लेते हुये आयलर विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण से $y(0.5)$ का मान ज्ञात कीजिए:
$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$

Q.6. (a) Solve $\frac{dy}{dx} = x^3 + 2xy^2 + y^3,\ y(0) = 1$ at $x = 0.2$ by Taylor's series method (up to 3rd decimal).

टेलर श्रेणी के प्रयोग से $y(0.2)$ का मान तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिये यदि $\frac{dy}{dx} = x^3 + 2xy^2 + y^3,\ y(0) = 1$

(b) Find approximate value of y and z by using Picard's method for the particular solution of $\frac{dy}{dx} = x + z,\ \frac{dz}{dx} = x - y^2$, given that $y = 2, z = 1$, when $x = 0$.

y तथा z के सन्निकट मान पिकार्ड विधि में प्राप्त कीजिये, यदि $\frac{dy}{dx} = x + z,\ \frac{dz}{dx} = x - y^2$, दिया हुआ है कि $x = 0$ पर $y = 2$ तथा $z = 1$

Q.7. Calculate $y(0.4),\ y(0.5)$ by Milne's P – C method, where y satisfies the differential equation:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x - y$$

and the corresponding values of x and y are given as:

मिलने P – C विधि के प्रयोग से प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = 2e^x - y$ का हल $y(0.4)$ व $y(0.5)$ पर ज्ञात कीजिए जबकि x व y का मान निम्न प्रकार ज्ञात है:

x :	0.0	0.1	0.2	0.3
y :	2.0	2.01	2.04	2.09

Q.8 (a) Using Runge – Kutta method find an approximate value of y for $x = 0.2$ in steps of 0.1, if $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ given $y = 1$ when $x = 0$.

रूंगे कुट्टा विधि का प्रयोग कर $x = 0.2$ पर y का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए यदि $\frac{dy}{dx} = x + y^2$, जबकि $x = 0$ पर $y = 1$ एवं पद लम्बाई 0.1 है।

(b) Find the eigen value and eigen vector of the matrix:

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूल तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

B.Sc. (Hons.) Fourth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
FOURTH PAPER
Operations Research – II

Attempt any two questions.

Q.1. Solve the following problem by Simulation.
निम्न समस्या को सिम्यूलेशन द्वारा हल कीजिए

Demand (माँग)	0	10	20	30	40	50
Probability: (प्रायिकता)	0.01	0.20	0.15	0.50	0.12	0.02

Random No. (यादृच्छिक संख्या)	48	78	19	51	56	77	15	14	68	09

Simulate the demand for next 10 days to 30 items every day.
अगले 10 दिनों के लिये 30 पदार्थ प्रतिदिन से समस्या को सिम्यूलेशन द्वारा हल कीजिए।

Q.2. The utility data for a network are given below. Determine the critical path and different type of floats.
नीचे एक नेट वर्क के आवश्यक सूचकांक दिए गए हैं। क्रान्तिक पथ तथा विभिन्न प्रकार के फ्लोटस ज्ञात कीजिए।

Activity (गतिविधि)	0-1	1-2	1-3	2-4	2-5	3-4	3-6	4-7	5-7	6-7
Duration (अवधि)	2	8	10	6	3	3	7	5	2	8

Q.3. Find the following measures of Queue Model (M/M/1:∞FCFS)
पंक्ति निदर्श (M/M/1:∞FCFS) के निम्न माप ज्ञात कीजिए।

(a) Queue Size $\geq N$.
पंक्ति आकार $\geq N$

(b) Expected Line Length of the System : $E(L_s)$
निकाय की प्रत्याशित रेखा लम्बाई : $E(L_s)$

(c) Expected Queue Length : $E(L_q)$
प्रत्याशित पंक्ति लम्बाई : $E(L_q)$

(d) Expected length of Non – empty Queue : $E(L/L > 0)$
अरिक्त पंक्ति की प्रत्याशित लम्बाई : $E(L/L > 0)$

Q.4. A shipping company has a single unloading berth with ships arriving in Poisson fashion at an average rate of three per day. The unloading time distribution for ship with the unloading crews is found to be exponential with average unloading time $\frac{1}{2n}$ days. The company has a large labour supply without regular working hours and to avoid long waiting lines the company has a policy of using as many unloading crews as there are ships waiting in line or being unloaded under these conditions, find :

एक जहाज की कम्पनी में जहाज खाली करने का एक प्लेटफार्म है जिसमें जहाजों का आगमन प्वायस बंटन के अनुसार 3 जहाज प्रतिदिन है। जहाज को खाली करने वाले समय तथा खाली करने वाले दलों का बंटन चर घातांकी है जिसका खाली करने का औसत समय $\frac{1}{2n}$ दिन है। कम्पनी के पास बहुत श्रमिक है तथा प्रायिकता जहाजों की पंक्ति को शीघ्रातिशीघ्र कम करने के लिए जितने जहाज होते हैं उतने ही श्रमिकों के दलों को कम्पनी कार्य पर लगाती है। इन स्थितियों में ज्ञात कीजिए :

a) The average number of unloading crews working at any time
किसी समय जहाज खाली करने वाले दलों की औसत संख्या

b) The probability that more than four crews will be needed
जहाज खाली करने वाले चार से अधिक दलों की आवश्यकता होने की प्रायिकता

Q.5. A manufacture has to supply his customer with 600 units of his product per year. Shortages are not allowed and the storage cost amounts to Rs. 0.60 per unit per year. The set up cost per run is Rs. 80 /-. Find the optimal run size and the minimum average yearly cost.
Find the following:
एक निर्माता को प्रति वर्ष अपने ग्राहकों को अपने उत्पादन की 600 इकाइयों की पूर्ति करनी पड़ती है। उत्पादन का अभाव नहीं है तथा उत्पादन की प्रति इकाई भण्डझरण खर्च 0.60 रू प्रति वर्ष है। व्यवस्था खर्च प्रति चक्र 80 रू. है। निम्न ज्ञात कीजिए।

a) Economic Order Quantity (EOQ)
मितव्ययी प्रचय आमाप (EOQ)

b) Minimum average yearly cost
न्यूनतम औसत वार्षिक लागत

c) Optimum number of orders per year
प्रति वर्ष आदेशों की इष्टतम संख्या

d) The optimum period of supply per optimum order
पूर्ती का इष्टतम समय प्रति इष्टतम आदेश

e) What is the increase in the total cost associated with ordering 20% more than EOQ?
EOQ में 20% आदेश बढ़ाने से सम्बन्धित कुल लागत में कितनी बढोतरी हो जाएगी ?

Q.6. Derive an economic lot size (EOQ) formula and the minimum average cost under the following assumptions :
निम्न मान्यताओं से (EOQ) सूत्र तथा न्यूनतम औसत लागत ज्ञात कीजिए।

a) Demand is at uniform rate r units of quantity per unit of time.
माँग की एक समान दर r इकाइयाँ प्रति इकाई समय है

b) Production is instantaneous
उत्पादन तात्क्षणिक है

c) Shortages are not allowed
उत्पादन का अभाव नहीं है

d) Lead time is zero i.e. $L = 0$
अग्रता काल $L = 0$

e) Holding cost = C_1 per unit quantity
भंडारण लागत = C_1 प्रति इकाई मात्रा

f) Set – up cost = C_3 per cycle
व्यवस्था लागत = C_3 प्रति चक्र

Q.7. There are five jobs, each of which is to be processed through three machines A,B and C in the order ABC. Processing times in hours are :
पाँच कार्य तीन मशीनों A,B तथा C पर ABC क्रम से संपादित किये जाते हैं। संपादन समय घंटों में है :

Job	**A**	**B**	**C**
1	3	4	7
2	8	5	9
3	7	1	5
4	5	2	6
5	4	3	10

Determine the optimum sequence for the five jobs and the minimum elapsed time.
पाँच कार्यो का इष्टतम अनुक्रम ज्ञात कीजिए तथा इसमें लगा न्यूनतम समय भी ज्ञात कीजिए।

Q.8. Find the sequence that minimizes the total elapsed time required to complete the following tasks on two machines:

निम्न कार्यो को दो मशीनों पर संम्पूर्ण होने के लिए अनुक्रम तथा न्यूनतम लगा समय ज्ञात कीतिए।

Task (कार्य)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Machine I (मशीन I)	2	5	4	9	6	8	7	5	4
Machine II (मशीन II)	6	8	7	4	3	9	3	8	11

*****

B.Sc. (Hons.) Sixth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
FIRST PAPER
Abstract Algebra-II

Attempt any two questions.

Q.1. (a) Prove that, every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring (residue class ring) thereof.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की प्रत्येक समाकारिक प्रतिबिम्ब उसकी किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होती है।

(b) Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals or if it is simple.

सिद्ध कीजिए कि, एक क्रमविनिमेय तत्सम की वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी कोई उचित गुणजावली न हो या यह एक सरल वलय हो।

Q.2. (a) Prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is maximal iff the quotient ring $R/_I$ is a field.

सिद्ध कीजिए कि तत्सम की क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय $R/_I$ एक क्षेत्र है।

(b) Prove that, the ring $(z, +, \cdot)$ of integers is a principal ideal domain.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की वलय $(z, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

Q.3. (a) Prove that, every integral domain can be embedded into a field.

सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णांकीय प्रान्त को एक क्षेत्र में अन्तः स्थापित किया जा सकता है।

(b) Prove that, the field $< z_p, +_p, \cdot_p >$ is a prime field for each prime number p.

सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र $< z_p, +_p, \cdot_p >$ प्रत्येक अभाज्य सँख्या p के लिए, एक अभाज्य क्षेत्र है।

Q.4. (a) Prove that, the set F^n of all ordered n – tuples of a field F is a vector space over the field

F for the vector addition and scalar multiplication defined as

सिद्ध कीजिए कि किसी क्षेत्र F के अवयवो के n क्रमित तुपलों का समुच्चय F^n, क्षेत्र F पर निम्न परिभाषित सदिश योग व अदिश गुणन के लिए एक सदिश समिष्ट है।

$(a_1, a_2, \dots \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots \dots a_n + b_n)$

$\propto\ (a_1, a_2, \dots \dots a_n) = (\propto a_1, \propto a_2, \dots \dots \propto a_n)$

where (जहाँ) $(a_1, a_2, \dots \dots a_n), (b_1, b_2, \dots \dots b_n) \in F^n\ \ \propto \in F$

(b) Prove that, the set S of all solutions satisfying the simultaneous equations

$ax + by + cz = 0$ and $dx + ey + fz = 0$, where $a, b, c, d, e, f \in R$ is a subspace of vector space $V = R^3$ over the field R.

सिद्ध कीजिए कि युगपत समीकरणों $ax + by + cz = 0$ तथा $dx + ey + fz = 0$ के समस्त हलों का समुच्चय S, जहाँ $a, b, c, d, e, f \in R$ पर सदिश समष्टि $V = R^3$ का क्षेत्र R पर उपसमष्टि है।

Q.5. (a) Prove that the vectors $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$ are linearly dependent in the vector

space $V_2(C)$ but are linearly independent in the vector space $V_2(R)$.

सिद्ध कीजिए कि सदिश $v_1 = (1+i, 2i), v_2 = (1, 1+i)$ सदिश समिष्ट $V_2(C)$ में एकघाततः परतन्त्र है परन्तु सदिश समष्टि $V_2(R)$ में एकघाततः स्वतंत्र है।

(b) Prove that, the set of non – zero vectors $\{v_1, v_2 \ldots \ldots v_n\}$ of a vector space $V(F)$ is linearly dependent iff some $v_k, 2 \leq k \leq n$ is a linear combination of the preceding vectors.
किसी सदिश समिष्ट $V(F)$ के अशून्य सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2 \ldots \ldots v_n\}$ एकघाततः आश्रित (परतंत्र) होगा यदि और केवल यदि कोई एक $v_k, 2 \leq k \leq n$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो।

Q.6. (a) If S and T are finite dimensional subspaces of a vector space, then prove that

$$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T).$$

यदि S एवं T किसी सदिश समिष्ट की परिमित विमिय उपसमिष्टयाँ हो, तो सिद्ध कीजिए
विमा S + विमा T =विमा $(S+T)$ + विमा $(S \cap T)$

(b) Prove that a vector space $V(F)$ is a direct sum of its two subspaces $U(F)$ and $W(F)$ iff
$V = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$
सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समिष्ट $V(F)$ अपनी दो उपसमिष्टयों $U(F)$ और $W(F)$ का अनुलोम योगफल होगी यदि और केवल यदि
(i) $v = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$

Q.7. (a) If $W(F)$ is any subspace of a vector space $V(F)$, then prove that the set $\frac{V}{W}$ of all co sets $W + v, v \in V$ is a vector space over the field F for the vector addition and scalar multiplication defined as
यदि $W(F)$ सदिश समिष्ट $V(F)$ की उपसमिष्ट है तो सिद्ध कीजिए कि W के V में सहसमुच्चयों $\frac{V}{W} = \{W + v, v \in V\}$ क्षेत्र $(F, +, \cdot)$ पर निम्न सदिश योग तथा अदिश गुणन संक्रिया के लिए सदिश समिष्ट होता है
$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2) \,\forall\, v_1, v_2 \in V$ and (और) $\propto \cdot (W + v) = W + \propto \cdot v, \propto \in k, v \in V$

(b) Show that the mapping $t: V_2(R) \to V_2(R)$ defined by $t(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ is an isomorphism.
सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $t: V_2(R) \to V_2(R)$ जहाँ $t(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$समिष्ट $V_2(R)$ पर एक तुल्यकारिता है।

Q.8. (a) Prove that, the kernel of a linear transformation $t: V \to V'$ is a subspace of the vector space V.

सिद्ध कीजिए कि रैखिक प्रतिचित्रण $t: V \to V'$ की अष्टि, सदिश समिष्ट V की उपसमिष्ट होती है।

(a) Prove that $t: R^3 \to R^3$, defined as $t(x,y,z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ is a linear transformation. Also find the rank and nullity of t.
सिद्ध कीजिए कि $t: R^3 \to R^3$, $t(x,y,z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ एक रैखिक रूपान्तरण है तथा t की कोटि एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

B.Sc. (Hons.) Sixth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
SECOND PAPER
Complex Analysis-II

Attempt any two questions.

Q.1. (a) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.
सिद्ध कीजिये कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है।

(b) Prove that the sequences $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ is uniformly convergent to zero in the region $|z| \geq 2.$
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ क्षेत्र $|z| \geq 2$ में शून्य को एक समान अभिसृत होती है।

Q.2. (a) Find the region of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$.
श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ का अभिसरण श्रेत्र प्राप्त कीजिये।

b) Show that the function $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... can be continued analytically outside the circle of convergence. Also construct a power series which is analytic continuation of given series.

सिद्ध कीजिये कि फलन $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... का विश्लेषिक सांतत्य अभिसरण वृत के बाहर किया जा सकता है। एक घात श्रेणी की रचना भी कीजिये जो कि दी हुई श्रेणी का विश्लेषिक सांतत्य है।

Q.3. State and prove Taylor's Theorem for complex functions.
कथन सहित सम्मिश्र फलनों के लिए टेलर प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.4. Prove that (सिद्ध कीजिये)

$$sin\left\{c\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^n + z^{-n})$$

where (जहाँ)

$$a_n = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} \sin(2c\,cos\theta)\ cos\,n\theta\ d\theta.$$

Q.5. Evaluate the integral $\frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz$ around the circle $c: |z| = 3.$
परिरेखा वृत $c: |z| = 3$ पर समाकल $\frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz$ का मान ज्ञात कीजिये।

Q.6. State and prove Rouche's Theorem.
कथन सहित रूशे प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.7. Discuss the transformation $w = z^2$. Find the images of the hyperbolas $x^2 - y^2 = c$ and $xy = d$ under this transformation.
रूपान्तरण $w = z^2$ की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों $x^2 - y^2 = c$ तथा $xy = d$ का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

Q.8. By integrating $\frac{e^{iz^2}}{z}$ round a suitable contour, prove that $\int_o^{\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \frac{\Pi}{4}$ also deduce that $\int_o^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\Pi}{2}$.
फलन $\frac{e^{iz^2}}{z}$ को उपयुक्त परिरेखा पर समाकलन करते हुए सिद्ध कीजिये कि $\int_o^{\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \frac{\Pi}{4}$ तथा निगमन भी कीजिये कि $\int_o^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\Pi}{2}$.

B.Sc. (Hons.) Sixth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
THIRD PAPER
Mechanics

Attempt any two questions.

Q.1. (a) The inclinations of the tangents at the extremities of a portion of a common catenary be α and β and l be length of the portion. If the two extremities are on one side of the catenary, show that, the height of one above the other is:

$$l\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

एक साधारण कैटनरी के l लम्बाई के एक भाग के सिरों पर स्पर्श रेखाओं के क्षैतिज से झुकाव α तथा β है। यदि दोनों सिरे कैटनरी के शीर्ष के एक ही ओर हो, तो सिद्ध कीजिए कि एक सिरे की दूसरे सिरे से ऊँचाई है:

$$l\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

(b) A uniform measuring chain of length l is tightly stretched over a river, the middle point just touching the surface of the water, while each of the extremities has an elevation k above the surface. Show that the difference between the length of the measuring chain and the breadth of the river is nearly $\frac{8}{3}\frac{k^2}{l}$.

l लम्बाई की एक समान जंजीर एक नदी के किनारों पर k ऊँचाई के खम्भों पर खींच कर इस प्रकार बांधा हुआ है कि इसके मध्य भाग का निचला बिन्दु नदी के जल स्तर को ठीक स्पर्श करता है। प्रदर्शित कीजिए कि जंजीर की लम्बाई तथा नदी की चौड़ाई का अंतर लगभग $\frac{8}{3}\frac{k^2}{l}$ है।

Q.2. (a) Five weightless rods of equal lengths are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight W be attached to C and the system is suspended from A, show that there is a thrust in BD equal to $W/\sqrt{3}$.

समान लम्बाई के पाँच भारहीन छड़ परस्पर जोड़े गए हैं ताकि एक विकर्ण BD सहित समचतुर्भुज $ABCD$ बने। यदि C पर एक भार W बाँध दिया जाए और निकार को A से लटकाया जाए, तो सिद्ध कीजिए कि BD में प्रणोद $W/\sqrt{3}$ के तुल्य है।

(b) A uniform ladder of length l and weight W, rests with its foot on the rough ground, and its \upper end against a smooth wall, incination to the vertical being α, A force P is applied horizontally to the ladder at a point distance C from the foot so as to make the foot approach the wall. Prove that P must exceed $\frac{lW}{l-C}\left(\mu+\frac{1}{2}\tan\alpha\right)$, where μ is the force of friction between plane and ladder.

एक समांग सीढ़ी की लम्बाई l तथा भार W है। सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज समतल पर है और दूसरा एक चिकनी दीवार के सहारे स्थित है। सीढ़ी उर्ध्वाधर से α कोण बनाती है। सीढ़ी की जड़ से C दूरी पर एक क्षैतिज बल P लगाकर सीढ़ी को दीवार की ओर खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि P का मान $\frac{lW}{l-C}\left(\mu+\frac{1}{2}\tan\alpha\right)$ से अधिक होना चाहिए, जहाँ समतल और सीढ़ी के बीच घर्ष ण गुणांक μ है।

Q.3. (a) A sphere of given weight W, rests between two smooth planes, one vertical and other inclined at

an Angle α to the vertical. Find the reactions of the planes on the sphere.
W भार का एक गोला दो चिकने समतलों के बीच में रखा हुआ है। एक समतल ऊर्ध्वाधर में है और दूसरा α कोण बनाता है। गोले पर समतलों की प्रतिक्रियाएँ ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that a system of coplanar forces acting upon a rigid body will be in equilibrium, if the algebraic sum of the moments of forces about each of three non-collinear points in their plane is zero.
सिद्ध कीजिए कि किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील एक समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि उनके समतल में स्थित तीन असमरेखीय बिन्दुओं के प्रत्येक के सापेक्ष बलों का आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

Q.4. (a) A particle is projected so as to have a range R on the horizontal plane through the point of projection. If α and β are the possible angles of projection and t_1 and t_2 the corresponding times of flights show that

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

एक कण इस प्रकार से फेंका जाता है कि प्रक्षेप बिन्दु से गुजरने वाले क्षैतिज समतल पर परास R है। यदि α तथा β सम्भव प्रक्षेप कोण हो तथा t_1 व t_2 संगत उड्डयन काल हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

(b) Shots are fired simultaneously from the top and bottom of a vertical cliff with elevations α and β respectively, strike an object simultaneously at the same point. Show that, if 'a' is horizontal distance of the object from the cliff, the height of the cliff is $a(\tan\beta - \tan\alpha)$.
एक ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी व पाद से दो गोलियाँ क्रमशः α व β कोण पर एक साथ दागी जाती है कि वे एक साथ किसी वस्तु को एक ही बिन्दु पर टकराती है। यदि वस्तु की मीनार से क्षैतिज दूरी a हो, तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $a(\tan\beta - \tan\alpha)$ होगी।

Q.5. (a) A particle describes the following curves under a force P to the pole find the law force

$$({}^{a}/_{r}) = e^{n\theta}, n\theta, \cos hn\theta \;\; or \sin hn\theta$$

ध्रुव बिन्दु की ओर बल P के अधीन एक कण $({}^{a}/_{r}) = e^{n\theta}\, n\theta, \cos hn\theta$ या $\sin hn\theta$ निर्मित करता है तो बल का नियम ज्ञात कीजिए।

(b) Prove analytically that when the central acceleration varies as some integral power of the distance, there are at the most two aspidal distance.
विश्लेषिक विधि से सिद्ध करो कि जब केन्द्रीय त्वरण दूरी की कोई पूर्णांकीय घात के समानुपाती हो तब अधिकतम दो स्तब्धिका दूरियाँ होती है।

Q.6. (a) A particle describes an ellipse under a force $\mu/(distance)^2$ towards the focus; if it was projected with velocity V from a point distance r from the centre of force, show that its periodic time is

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$$

एक कण एक बल, जो कि $\mu/(\text{दूरी})^2$ है और नाभि की ओर है, के अधीन एक दीर्घवृत का निर्माण करता है। यदि इसे एक बिन्दु से, जिसकी दूरी बल केन्द्र से r है, V वेग से प्रक्षिप्त किया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल होगाः

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$$

(b) A planet describes an ellipse about the sun as focus. Prove that its velocity at the end of the minor axis is geometric mean between its velocities at the ends of any diameter.
एक ग्रह नाभिका में स्थित सूर्य के प्रति एक दीर्घवृत बनाता है। सिद्ध करो कि लघु अक्ष के एक सिरे पर इसका वेग किसी भी व्यास के सिरों पर के वेग का ज्यामितीय माध्य होगा।

Q.7. (a) Find loss of kinetic energy by direct impact of two smooth elastic spheres.

दो चिकने प्रत्यास्थ गोलों के सीधे संघट्ट से गतिज ऊर्जा का ह्रास ज्ञात कीजिए।

(b) A ball A of mass m_1 impinges directly on another ball B of mass m_2 which is at rest. After the impact, B impinges directly on the third ball C of mass m_3 which is also at rest. If the velocity of the ball A before be u and the velocity imparted to C be v and if e be the coefficient of restitution, show that:

$$(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)v = m_1 m_2 (1 + e)^2 u$$

m_1 संहति की एक गेंद A, m_2 संहति की दूसरी गेंद B से सीधी टकराती है जो विरामावस्था में है। संघट्ट के पश्चात् गेंद B एक m_3 संहति की तीसरी गेंद C से सीधी टकराती है जो कि विरामावस्था में है। यदि गेंद A का संघट्ट से पूर्व वेग u तथा गेंद C का संघट्ट के पश्चातृ वेग v हो तथा e प्रत्यास्थता गुणांक हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)v = m_1 m_2 (1 + e)^2 u$$

Q.8. (a) A ball impinges on another ball of equal mass at rest. If both balls are smooth and perfectly elastic, then prove that they move at right angles after impact. What will happen in case of direct impact?

एक गोला बराबर संहति वाले एक अन्य स्थिर गोले के तिर्यक टक्कर मारता है। यदि दोनों गोले चिकने तथा पूर्ण प्रत्यास्थ हो, तो सिद्ध करो कि टक्कर के पश्चात् वे एक दूसरे के समकोण दिशाओं में चलेंगे। बताओं सीधी टक्कर की अवस्था में क्या होगा।

(b) A ball moving with a velocity 8 ft, per second impinges at an angle of 30° on a smooth plane, find the velocity and direction of motion after impact, the coefficient of restitution being $\frac{1}{2}$.

$30°$ का कोण बनाते हुए, 8 फीट प्रति सैकण्ड के वेग से एक गेंद किसी चिकने क्षैतिज तल से टकराती है। यदि प्रत्यास्थता गुणांक $\frac{1}{2}$ हो, तो संघट्ट के पश्चात् इसका वेग तथा गति की दिशा ज्ञात करो।

B.Sc. (Hons.) Sixth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
FOURTH PAPER
Statistics-II

Attempt any two questions.

Q.1. (a) Give the axiomatic definition of probability. With the help of axioms of probability, prove that if A is an empty set in a finite sample space is S, then $P(A) = 0$.

प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा दीजिए। प्रायिकता अभिगृहीत की सहायता से सिद्ध कीजिए कि यदि परिमित समष्टि S में A एक रिक्त समुच्चय है तब $P(A) = 0$

(b) State and prove Baye's Theorem.

बेज प्रमेय को व्यक्त एवं सिद्ध कीजिए।

Q.2. (a) Explain the following: Random experiment, simple and compound events, mutually exclusive events, independent events, odds.

निम्न की व्याख्या कीजिए: यादृच्छिक अभिकल्पना, सरल एवं संयुक्त घटनाऐं, परस्पर अपवर्जी घटनाऐं, स्वतंत्र घटनाऐं, संयोगानुपात।

(b) Three groups of children contain respectively 3 girls and 1 boy, 2 girls and 2 boys, 1 girl and 3 boys. One child is selected at random from each group. Find the probability that the selected children contain 1 girl and 2 boys.

बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ 1 लड़का, 2 लडकियाँ व 2 लड़के, 1 लड़की व 3 लड़कें हैं। प्रत्येक समूह में से यादृच्दिक रूप से एक बच्चे का चयन किया गया। चुने गये बच्चों में 1 लड़की एवं 2 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Q.3. (a) Define probability density function and distribution function of one dimensional random variable and prove that :

प्रायिकता घनत्व फलन तथा बंटन फलन को परिभाषित कीजिए तथा एकल यादृच्छिक चर के बंटन के लिए सिद्ध कीजिए:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

(b) Define mathematical expectation of a random variable. If X and Y are two independent random variables then prove that:

एक यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा को परिभाषित कीजिए। यदि X और Y दो स्वतंत्र चर हैं तो सिद्ध कीजिए:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Q.4. (a) Define moment generating function and give its limitations. Prove that the moment generating function of the sum of a number of independent random variables is equal to the product of their respective moment generating functions.

आघूर्ण जनक फलन को परिभाषित कीजिए एवं इसकी संकीर्णताऐं बताइये। सिद्ध कीजिए कि स्वतंत्र चरों के योग का आघूर्ण जनक फलन उनके अलग–अलग आाघूर्ण जनक फलनों के गुणन के बराबर होता है।

(b) Two unbiased dice are thrown. If X is the sum of numbers shown up, prove that:

दो अनमिनत पाशे फेंके गये। यदि X उनके ऊपर आने वाली संख्याओं के योग को प्रदर्शित करें तो सिद्ध कीजिए:

$$P_r(|X-7| > 3) \leq \frac{35}{54}$$

compare this with the actual probability.

इसकी वास्तविक प्रायिकता से तुलना कीजिए।

Q.5. (a) Obtain the moment generating function of binomial distribution. If X and Y are binomial variates then prove that X+Y is not a binomial variate. Under which condition X+Y be a binomial variate?

द्विपद बंटन का आघूर्णजनक फलन ज्ञात कीजिए। यदि X एवं Y दो द्विपद चर हैं तो सिद्ध कीजिए कि $X+Y$ एक द्विपद चर नहीं है। किन परिस्थितियों में $X+Y$ द्विपद चर होगा?

(b) Prove that Poisson distribution is a limiting case of binomial distribution.
सिद्ध कीजिये कि प्वासों बंटन द्विपद बंटन का सीमान्त बंटन है।

Q.6. (a) Define Rectangular Distribution and find its mean deviation about mean.
आयतीय बंटन को परिभाषित कीजिए एवं इसका माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

(b) If X is a normal variate with mean 12 and standard deviation 4, then find out the probability of the following:
यदि X एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 4 हो तो निम्न प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) $x \geq 20$ (ii) $x \leq 20$
(iii) $0 \leq X \leq 12$ (iv) find ज्ञात कीजिए x' when यदि $P(X > x') = 0.24$

Q.7. (a) Given the following bivariate probability distribution. Obtain (i) Marginal distribution of X and Y (ii) The conditional distribution of X given Y=2
निम्न द्विचर प्रायिकता बंटन दिया गया है:
ज्ञात कीजिए (i) X एवं Y के उपांत बंटन (ii) यदि $Y=2$ दिया हुआ है तो X का सप्रतिबंधित बंटन

Y \ X	-1	0	1
0	$^1/_{15}$	$^2/_{15}$	$^1/_{15}$
1	$^3/_{15}$	$^2/_{15}$	$^1/_{15}$
2	$^2/_{15}$	$^1/_{15}$	$^2/_{15}$

(b) The random variables X and Y have the joint density function:
दो दैविक चरों X और Y का संयुक्त घनत्व फलन

$$f(x,y) = 8xy \qquad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{otherwise अन्यथा}$$

Find ज्ञात कीजिए :

(i) $P\left(x < \frac{1}{2} \cap y < \frac{1}{4}\right)$
(ii) The marginal distributions of X and Y
X और Y का सीमान्त बंटन
(iii) Are X and Y independent? Give reason for your answer.
क्या X एवं Y स्वतंत्र चर हैं? अपने उत्तर में कारण बताइये।

Q.8. (a) Explain Central Limit Theorem and give its applications.
केन्द्रीय सीमान्त प्रमेय को समझाइये और इसके उपयोग दीजिए।

(b) The joint p.d.f. of two random variables X and Y is given by:
दो यादृच्छिक चरों X एवं Y का संयुक्त घनत्व फलन दिया गया है:

$$f(x,y) = \frac{9(1+x+y)}{2(1+x)^4(1+y)^4}; \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

Find the marginal distributions of X and Y and the conditional distribution of Y for X= x.
X एवं Y का सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए तथा $X=x$ के लिए Y का सप्रतिबन्धित बंटन भी ज्ञात कीजिए।